総実代数体のKronecker極限公式について(解析数論:最近の発展)

江上, 繁樹

数理解析研究所講究録
708巻 1989年 77-85

総実代数体のKronecker極限公式について

江上繁樹（富山大学）
EGAMI Shigeki

§0. [S1], [S2], [S3] において、総実代数体 K の合同ideal類 C に対する partial zeta 関数 $\zeta_K(s, C)$ について、$s=0$ における値および1階導関数の値の新しい表示が得られた。よく知られているように、これらの値はある種の符号条件をみたす Hecke 類指標 χ に対する $L_K(1, \chi)$ の値と結びついている。より一般の χ を扱うためには $\zeta_K(s, C)$ の高階導関数の0における値が必要になる。このノートでは $0 \leq r \leq [K:\mathbb{Q}]-1$ のとき $\zeta_K^{(r)}(0, C)$ を Barnes zeta 関数の多重積分および、その s に関する導関数の1次結合で表わすことを試みる。$r=0, 1$ の場合、[S1]〜[S3] の別証が得られる。証明の方法は [E1] の拡張である。

§1. K を n 次総実代数体 $(n \geq 1)$, C をある modulus に関する狭義 ray class, $\mathfrak{b}$ を整 ideal で $\mathfrak{b}^{-1} \in C$ なるものとする。

$$\zeta_K(s, C) = N\mathfrak{b}^{s} \sum_{(\alpha) \subset \mathfrak{b}} N_K(\alpha)^{-s},$$

ただし、和は $(\alpha) \subset \mathfrak{b}$ となる単項 ideal (α) 全体にわたるものとする。

[S1] にあるように、右辺の和は

$$\sum_{(\alpha)\subset \mathfrak{a}} N_K(\alpha)^{-s} = \sum_{j\in J}\sum_{x\in R_j} \zeta(s, A_j, x),$$

ただし，Jは添字の有限集合，R_j は $\mathbb{Q}_{>0}^{r_j}$ $(1\leqq r_j \leqq n)$ の有限集合，

A_j は (n, r_j) 型の成分が正であるような行列である。また $\zeta(s, A, x)$ は次のようなDirichlet級数である： $A=(a_{ij})$ $\begin{smallmatrix} i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,r\end{smallmatrix}$, $a_{ij}>0$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r\end{pmatrix}$, $x_j>0$ に対して

$$\zeta(s, A, x) = \sum_{(n_1,\cdots,n_r)\in \mathbb{N}^r} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(n_j + x_j)\right)^{-s}$$

この級数は $\mathrm{Re}\, s > \frac{r}{n}$ で広義一様かつ絶対収束し，全s-平面に有理型に解析接続される。([S1]) 特に $n=1$ の場合，Barnes の zeta関数といい，$\Omega=(\omega_1,\cdots,\omega_r)$ に対し，$\zeta_r(s, \Omega, x)$ とかくことにする。以上のことから，$\zeta_K(s, \mathfrak{c})$ の $s=0$ での挙動を調べるには $\zeta(s, A, x)$ について調べれば十分である。

$1\leqq k \leqq n$ となる k に対し，Aの第k行と第n行を入れかえた行列を $A^{(k)}$ であらわす。また $(u_1,\cdots u_{n-1})\in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(\underline{u}) = \varphi(u_1,\cdots,u_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ 1-u_1-\cdots-u_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とおく。次の命題は容易に出る

Proposition 1. $\mathrm{Re}\, s > \frac{r}{n}$ のとき

$$\zeta(s, A, x) = \frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)^n} \sum_{k=1}^{n} \int_{D_{n-1}} (u_1 \cdots u_{n-1})^{s-1} (1 - u_1 - \cdots - u_{n-1})^{s} \times$$

$$\zeta_r(ns, {}^t(A^{(k)} \varphi(\underline{u})), x)\, du_1 \cdots du_{n-1},$$

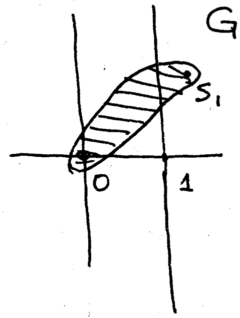
ただし、$D_{n-1} = \{ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mid x_i \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 \}$。

[S1]〜[S3]では、この積分（少し形は違うが）を contour integral に変形して解析接続しているが、ここでは、被積分関数を変形していく。

§2. この節では一般に

$$I(s, g) = \int_{D_m} (u_1 \cdots u_m)^{s-1} (1 - u_1 - \cdots - u_m)^{s} g(s, \underline{u})\, du_1 \cdots du_m$$

の形の積分の $s=0$ への解析接続を考察する。ただし $g(s, \underline{u})$ は次の条件をみたすものとする：



(*) $\exists G$: 0 および s_1 ($\mathrm{Re}\, s_1 > 1$) をふくむ領域，
$\exists F$: D_m をふくむ $\mathbb{C}^m$ の領域
があり，$g(s, \underline{u})$ は $G \times F \ni (s, \underline{u})$ で正則

被積分関数は u_i のいくつかが 0 となるところで $\mathrm{Re}\, s < 1$ のとき singularity をもつので、それらを除去することを考える。

$0 \leq p \leq m-1$ をみたす p に対し、

$D^{(0)} = \{(0, \cdots, 0)\}$,

$D^{(p)} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} D(i_1, \cdots, i_p)$, $D(i_1, \cdots, i_p) = \{(u_1, \cdots, u_m) \in D^m \mid u_i = 0 \text{ if } i \notin \{i_1, \cdots, i_p\}\}$

とおく。明らかに $D^{(0)} \subset D^{(1)} \subset \cdots \subset D^{(m-1)} \subset D = D_m$。

H を D_m で正則な m 複素変数の関数のなす線型空間、

$H^{(p)} = \{ f \in H \mid f(\underline{u}) = 0 \ \forall \underline{u} \in D^{(p)} \}$, $H^{(-1)} = H$

とおくと

$$H = H^{(-1)} \supset H^{(0)} \supset \cdots \supset H^{(m-1)}$$

H 上の線型作用素 $\partial^{(p)}$ を

$$(\partial^{(p)} f)(u_1, \cdots, u_m) = f(u_1, \cdots, u_m) - \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} f \circ P_{i_1, \cdots, i_p}(\underline{u}),$$

ただし、$P_{i_1, \cdots, i_p}(\underline{u}) = (v_1, \cdots, v_m)$, $v_i = \begin{cases} 0 & i \notin \{i_1, \cdots, i_p\} \\ u_{i_\nu} & (\nu = 1, \cdots, p) \end{cases}$

とおく。$\partial^{(p)} H^{(p-1)} \subset H^{(p)}$ は容易にわかる。従って

$$\Delta_p \doteqdot \partial^{(p)} \circ \partial^{(p-1)} \circ \cdots \circ \partial^{(0)}$$

とおくと、$\Delta_p H \subset H^{(p)}$.

さらに

Proposition 2. $1 \leqq p \leqq m$, $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m$ とするとき

$$f \in H^{(p-1)} \Rightarrow \frac{1}{u_{i_1} \cdots u_{i_p}} (f \circ P_{i_1, \cdots, i_p})(\underline{u}) \text{ は } D(i_1, \cdots, i_p) \text{ で}$$

連続.

Corollary. 上の条件の下に,

$$f \in H \Rightarrow \frac{1}{u_{i_1} \cdots u_{i_p}} ((\Delta_{p-1} f) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})(\underline{u}) \text{ は } D(i_1, \cdots, i_p) \text{ で}$$

連続.

この結果を使って, $I(s, g)$ の解析接続を与える.

まず, 形式的な変形により

$$I(s, g) = I(s, \Delta_m g) + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq m} I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})$$

$$+ I(s, g(s, 0, \cdots, 0)) \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

ここで, 和の各項および最後の項は

$$I(s, (\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p})$$

$$= \frac{1}{m-p+1} \frac{\Gamma(s)^{m-p+1}}{\Gamma((m-p+1)s)} \int_{D(i_1, \cdots, i_p)} (u_{i_1} \cdots u_{i_p})^{s-1} (1 - u_{i_1} - \cdots - u_{i_p})^{s} \times$$

$$(\Delta_{p-1} g) \circ P_{i_1, \cdots, i_p}(\underline{u}) \cdot du_{i_1} \cdots du_{i_p}.$$

$$I(s, g(s,0,\dots,0)) = g(s,0,\dots,0)\frac{1}{m}\frac{\Gamma(s)^{m+1}}{\Gamma((m+1)s)}$$

$$I(s, \Delta_m g) = \int_{D_m} (u_1\cdots u_m)^{s-1}(1-u_1-\cdots-u_m)^s(\Delta_m g)(\underline{u})\,du_1\cdots du_m.$$

Proposition 2により上の積分の各項は条件☆のGの形をした領域で収束し、その範囲で s の正則関数をあらわす。従って $I(s,g)$ は 0の近傍へ解析接続される。

§3. 前までの結果をProposition 1の積分に応用する。$m=n-1$ とおき、簡単のため

$$g_k(s, \underline{u}) = \zeta_r(ns, {}^t(A^{(k)}\varphi(\underline{u})), x)$$

とおく。$g_k(s,\underline{u})$が条件☆をみたすことは容易に示せる（[B], [E2]）従って

Theorem. $s=0$の近傍で

$$\zeta(s,A,x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\Big\{\zeta_r(ns,A_k,x) + \sum_{p=1}^{n-2}\frac{1}{n-p}\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma((n-p)s)}\cdot\frac{1}{\Gamma(s)^p}\times$$

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n-1}\int_{D(i_1,\dots,i_p)}(u_{i_1}\cdots u_{i_p})^{s-1}(1-u_{i_1}-\cdots-u_{i_p})^s(\Delta_{p-1}g_k)\Phi_{i_1,\dots,i_p}(\underline{u})\,du_{i_1}\cdots du_{i_p}$$

$$+\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)^n}\int_{D_{n-1}}(u_1\cdots u_{n-1})^{s-1}(1-u_1-\cdots-u_{n-1})^{s}(\Delta_{n-1}g_k)(\underline{u})\,du_1\cdots du_{n-1}\Big\}$$

ただし．A_k は A の第 k 行ベクトルをあらわす．

Corollary 1 ([S2], [S3])

$$\zeta(0,A,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\zeta_r(0,A_k,x)$$

$$\frac{d}{ds}\zeta(s,A,x)\Big|_{s=0}=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{d}{ds}\zeta_r(s,A_k,x)\Big|_{s=0}$$

$$+\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}\int_0^1\frac{1}{u}\left(\zeta_r(0,A_j u+A_k(1-u),x)-\zeta_r(0,A_k,x)\right)du\Big\}.$$

$p\geqq 2$ の場合．ζ_r の多重積分が出てきて．わかりやすい形には書けないが．

$$\frac{1}{n-p}\,\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma((n-p)s)\,\Gamma(s+1)^p}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n-1}\int_{D(i_1,\cdots,i_p)}(u_{i_1}\cdots u_{i_p})^{s-1}(1-u_{i_1}-\cdots-u_{i_p})^{s}$$

$$\times(\Delta_{p-1}g_k)_{P_{i_1\cdots i_p}}(\underline{u})\,du_{i_1}\cdots du_{i_p}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(p)}(A,x)\,s^\nu$$

を $s=0$ での展開とすると

Corollary 2.

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^q \zeta(s, A, x)\Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{ds}\right)^q \zeta_r(ns, A_k, x)\Big|_{s=0}$$

$$+ C_{q-1}^{(1)}(A, x) + C_{q-2}^{(2)}(A, x) + \cdots + C_0^{(q)}(A, x) \quad (0 \leqq q \leqq n-1).$$

<u>Remark</u> 1. $\zeta_r(0, (v_1, \ldots, v_n), (x_1, \ldots, x_n))$ は v_i, x_i 達の有理関数.
また $\frac{d}{ds}\zeta_r(s, (v_1, \ldots, v_n), (x_1, \ldots, x_n))$ は Barnes の多重ガンマ関数によって表わされる ([B], [E2])。

2. $C_0^{(q)}(A, x)$ は a_{ij}, x_j の有理関数の q-重積分 したがって $q \geqq 1$ なら初等関数の $q-1$ 重積分となる。

文献

[S1] Shintani, T., On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976), 393–417

[S2] Shintani, T., On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, ibid. 24 (1977), 167–199

[S3] Shintani, T., On values at s=1 of certain L-functions of totally real algebraic number fields. Algebraic Number Theory (Proc. International Symp. Kyoto), Japan Soc. for Promotion of Science, 201–212, 1977.

[B] Barnes, E.W., On the theory of the multiple gamma function., Trans. Cambridge Philos. Soc. 19, 374–425 (1904).

[E1] Egami, S., A note on Kronecker limit formula for real quadratic fields, Mathematika 33 (1986), 239–243

[E2] Egami, S., Note on multiple gamma functions (preprint).